El tamaño del Infinito

VI Escuela de Invierno Ingemat

Profesor Héctor Olivero Q.

Instituto de Ingeniería Matemática — UV

2026

El hotel infinito del Sr. Hilbert

El hotel más lujoso del mundo es un hotel para números naturales.

Cuentan que cuando se construyó, cada número natural $1, 2, 3, \ldots$ tenía su propia habitación. Sin embargo, se habían olvidado de 0.

¿Será posible darle a 0 su propia habitación?

Lógica

Definición — Proposición Lógica

Definición (Proposición Lógica)

*Por **proposición lógica** entenderemos cualquier afirmación susceptible a ser verdadera o falsa.*

Ejemplos:

- "Llueve en Valparaíso."
- "Hoy es lunes."
- "La lógica matemática es muy difícil."

Las proposiciones se denotan por letras minúsculas: $p, q, r, \ldots$

Definición — Proposiciones Equivalentes

Definición (Proposiciones Equivalentes)

*Dadas dos proposiciones p y q diremos que son **equivalentes** si tienen el mismo valor de verdad. Se denota $p \Leftrightarrow q$.*

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definición — Negación

Definición (Negación)

*Dada una proposición p, su **negación** $\bar{p}$ es la proposición que tiene siempre el valor de verdad contrario al de p.*

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Definición — Conjunción

Definición (Conjunción)

*La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera si y sólo si p y q son ambas verdaderas simultáneamente.*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición — Disyunción

Definición (Disyunción)

*La **disyunción** $p \vee q$ es verdadera si al menos una de las proposiciones es verdadera.*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición — Implicancia

Definición (Implicancia)

*Decimos que p **implica** q, denotado $p \Rightarrow q$, si cada vez que p es verdadera, q también lo es.*

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

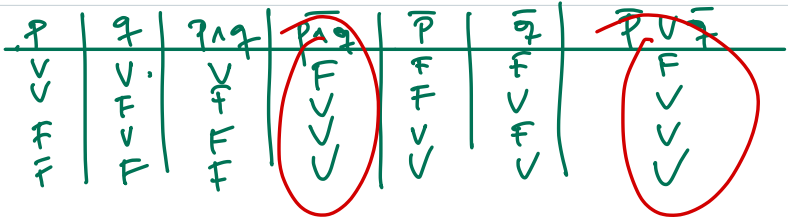
Algunas Leyes de la lógica

Proposición

Sean p, q proposiciones lógicas. Entonces:

1. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ y $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ *(De Morgan)*

Demostración:



Proposición

Sean p, q, r proposiciones lógicas. Entonces:

1. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Demostración:

Proposición

Sean p, q, r proposiciones lógicas. Entonces:

1. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *(Transitividad)*

Demostración:

Proposición

Sean p, q, r proposiciones lógicas. Entonces:

1. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ *(Doble implicancia)*

Demostración:

Una primera demostración formal

Proposición

$\sqrt{2}$ no es un número racional.

$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$2(2k^2+2k) + 1$

Demostración:

Supongamos que $\sqrt{2} = p/q$, con p y q primos relativos.

$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow$ p es par

Entonces $p = 2k$, $\left.\begin{array}{l} 2q^2 = (2k)^2 \\ = 4k^2 \end{array}\right\} \Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow$ q es par.

Demostración:

$\therefore$ p y q tienen factor común

y eso es una contradicción.

$\square$

Conjuntos

Definición (Conjunto)

*Por **conjunto** entenderemos una colección de objetos previamente definidos y diferenciables entre sí, a los que llamaremos **elementos**.*

Definición (Conjunto)

*Por **conjunto** entenderemos una colección de objetos previamente definidos y diferenciables entre sí, a los que llamaremos **elementos**.*

Ejemplos: $\{a, b, c\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{\text{planetas del sistema solar}\}$.

Definición (Conjunto)

*Por **conjunto** entenderemos una colección de objetos previamente definidos y diferenciables entre sí, a los que llamaremos **elementos**.*

Ejemplos: $\{a, b, c\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, {planetas del sistema solar}.

Los conjuntos se denotan con mayúsculas ($A, B, C, \ldots$) y los elementos con minúsculas ($a, b, c, \ldots$). Un conjunto puede describirse por *extensión* (listando elementos) o por *comprensión* (enunciando una propiedad).

Conjuntos numéricos importantes

Los siguientes corresponden a ejemplos de conjuntos numéricos:

1. El conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, \ldots\}$, que denotaremos $\mathbb{N}$.
2. El conjunto de los números enteros $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, que denotaremos $\mathbb{Z}$.
3. El conjunto de los números racionales $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ que denotaremos $\mathbb{Q}$.
4. El conjunto de los números reales, que denotaremos $\mathbb{R}$.

Definición (Igualdad de Conjuntos)

Dados A y B, decimos que $A = B$ si contienen los mismos elementos:

$$A = B \;\Leftrightarrow\; \big[(\forall x)\; x \in A \Rightarrow x \in B\big] \wedge \big[(\forall x)\; x \in B \Rightarrow x \in A\big].$$

$\Leftrightarrow \quad (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$

Definición (Igualdad de Conjuntos)

Dados A y B, decimos que $A = B$ si contienen los mismos elementos:

$$A = B \Leftrightarrow \big[(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in B\big] \wedge \big[(\forall x)\, x \in B \Rightarrow x \in A\big].$$

Ejemplo: El conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ son iguales.

Definición (Igualdad de Conjuntos)

Dados A y B, decimos que $A = B$ si contienen los mismos elementos:

$$A = B \Leftrightarrow \big[(\forall x)\, x \in A \Rightarrow x \in B\big] \wedge \big[(\forall x)\, x \in B \Rightarrow x \in A\big].$$

Ejemplo: El conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ son iguales.

Definición (Conjunto Vacío)

*El **conjunto vacío**, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no contiene ningún elemento.*

$$\emptyset = \{x : x \in \emptyset = F\}$$

Definición (Inclusión)

Dados A y B, decimos que $A \subset B$ ("A está incluido en B") si todo elemento de A pertenece también a B:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A)\ x \in B.$$

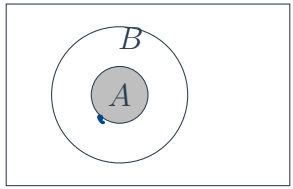


Figura: Diagrama de Venn para la inclusión: $A \subset B$.

Ejemplo: Se tiene la siguiente cadena de inclusions: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Proposición

Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C.$
2. $A \subset A.$
3. $\emptyset \subset A.$
4. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C.$
5. $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B.$

Demostración:

$\emptyset \subset A \iff \underbrace{\forall x \in \emptyset}_{F} \Rightarrow x \in A$

Demostración:

Definición (Las partes de un conjunto)

Dados un conjuntos A, llamaremos **conjunto de las partes de A,** *o simplemente las partes de A, al conjunto que reúne a todos los subconjuntos de A. Se puede denotar por $\mathcal{P}_A$ o por 2^A.*

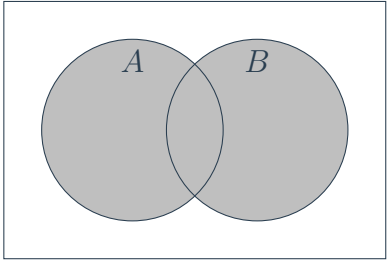
Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c\}$,
$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Operaciones con Conjuntos

Definición (Unión)

Dados dos conjuntos A y B, la unión de ellos, denotada como $A \cup B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están al menos en uno de los dos conjuntos. Es decir:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

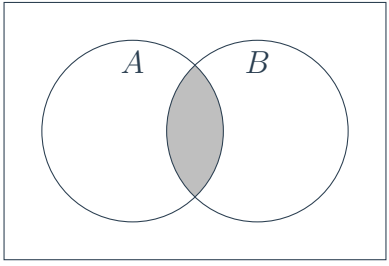


Ejemplo: $\{a, b, c\} \cup \{e, d, f\} = \{a, b, c, e, d, f\}$.

Definición (Intersección)

Dados dos conjuntos A y B, la intersección de ellos, denotada como $A \cap B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos. Es decir:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$



Ejemplo: $\{a, b, c\} \cap \{e, d, f\} = \emptyset$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\{a, b, c\} \cap \{a, e, g, f\} = \{a\}$.

Proposición

Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $A \cap B = B \cap A$.
   $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

Demostración:

Demostración:

Ejercicio

Sea A un conjunto incluido en un universo U. Demuestre que:

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cup \emptyset = A$.
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cup U = U$.
6. $A \cap U = A$.

Solución:

Ejercicio

Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que:

1. $A \subset C,\ B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C.$
2. $A \subset B,\ A \subset C \Rightarrow A \subset B \sqcap C.$

Solución:

Suponemos que $A \subset C$, $B \subset C$ y queremos probar que $A \cup B \subset C$.

Sea $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$

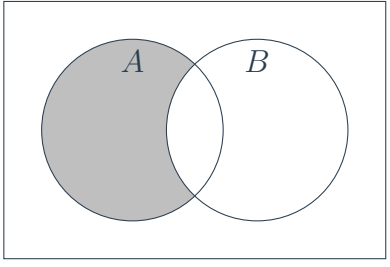
$\Rightarrow x \in C \vee x \in C$

$\iff x \in C.$

Definición (Diferencia)

Dados dos conjuntos A y B, la diferencia de A menos B, denotada como $A\backslash B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en A, pero no están en B. Es decir:

$$A\backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



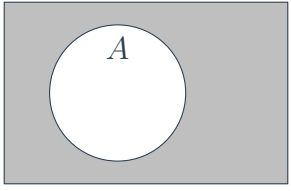
Ejemplo: $\{a, b, c\}\backslash\{e, d, f\} = \{a, b, c\}$, $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N} = \{\ldots, -2, -1\}$, $\{a, b, c\}\backslash\{a, e, g, f\} = \{b, c\}$.

Definición (Complemento)

Dado un conjunto universo U y un conjunto $A \subset U$, el complemento de A, denotado como A^c, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en U, pero no están en A. Es decir:

$$A^c = U \backslash A.$$

En el caso de que el conjunto universo se infiere del contexto, se suele escribir $A^c = \{x \notin A\}$.



Ejemplo: Si el universo es el alfabeto latino, $\{\text{consonantes}\}^c = \{a, e, i, o, u\}$.

Proposición

Sean A, B conjuntos. Entonces:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
   $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.
2. $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.
3. $(A^c)^c = A$
4. $A \cup A^c = U$.
   $A \cap A^c = \emptyset$.

Demostración:

1) Sea $x \in (A \cap B)^c \iff x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin \{y : y \in A \wedge y \in B\}$

$\iff x \in \{y : y \notin A \vee y \notin B\}$

$x \in \{y : y \in A^c \vee y \in B^c\}$

$\iff x \in A^c \cup B^c$.

Demostración:

Sea $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$

$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)^c$

$A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c.$

Demostración:

$A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

Sea $x \in B^c \Rightarrow x \notin B$, pero $A \subseteq B$

así $x \notin A \iff x \in A^c$.

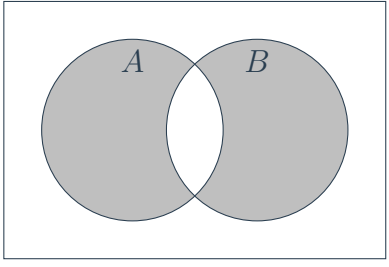
Obs: $A^c \subseteq U \Rightarrow U^c \subseteq (A^c)^c$

$\phi \subseteq A$

Definición (Diferencia Simétrica)

Dados dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica entre A y B, denotada como $A\triangle B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que: están en A, pero no están en B, o bien, están en B, pero no están en A. Es decir:

$$A\triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$



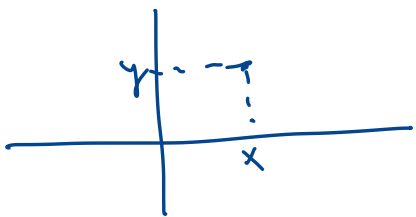
Ejemplo: $\mathbb{Z}\triangle\mathbb{N} = \{\ldots, -2, -1\}$, $\{a, b, c\}\triangle\{a, e, g, f\} = \{b, c, e, g, f\}$.

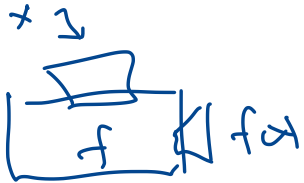
Definición (Producto Cruz (o Cartesiano))

Dados dos conjuntos A y B, el producto cruz entre ellos, denotado como $A \times B$, consiste en el conjunto de todos los **pares ordenados** (a, b) *que se pueden construir considerando $a \in A$ y $b \in B$. Es decir*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ x \in B\}.$$

Ejemplo: $\{0, 1\} \times \{a, b, c\} = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$.





Operaciones con una cantidad arbitraria de conjuntos

Sea I un conjunto cualquiera, tal que para todo $i \in I$, A_i es un conjunto. Se define:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a : (\exists\, i \in I)\, a \in A_i\},$$

mientras que

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a : (\forall\, i \in I)\, a \in A_i\}.$$

Operaciones con una cantidad arbitraria de conjuntos

Por otro lado, el producto cruz se puede definir entre una cantidad finita de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, como el conjunto de todas las listas ordenadas de tamaño n tales que el i-ésimo elemento pertenece a A_i. Es decir:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Formalmente, $A_1 \times \ldots \times A_n$ se puede definir inductivamente para $n \geq 2$ como

$$A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

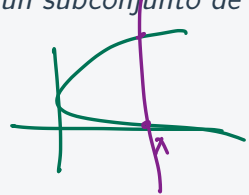
Funciones

Definición (Función)

Sean A, B conjuntos, una función $f : A \to B$, corresponde a un subconjunto de $A \times B$ que satisface:

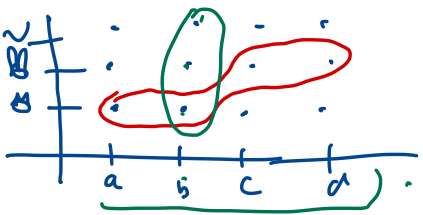
$$(\forall a \in A)\,(\exists b \in B)\ \ (a, b) \in f.$$

$$((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \Rightarrow b = c.$$



En palabras, a cada elemento de A, f asocia a lo más un elemento de B.

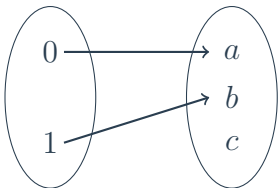
Ejemplo: $f = \{(0, a), (1, b)\}$ es una función desde $\{0, 1\}$ a $\{a, b, c\}$, mientras que $g = \{(0, a), (0, c), (1, b)\}$ no lo es.

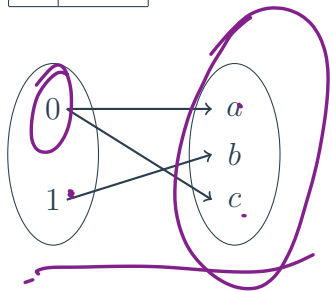


Representaciones de funciones

x	$f(x)$
0	a
1	b

x	$g(x)$
0	a
0	c
1	b

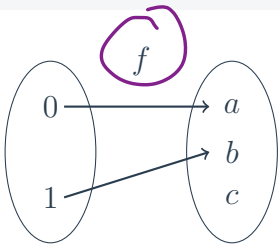


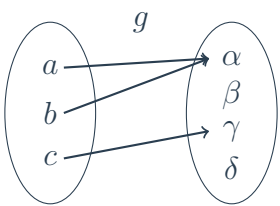


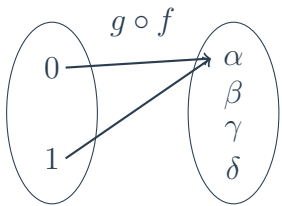
Definición (Composición de funciones)

Sean A, B, C conjuntos, una función $f : A \to B$ y una función $g : B \to C$. Se define la **composición** *de f y g, denotada por $g \circ f$, como*

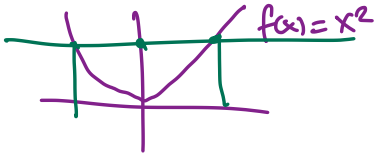
$$\begin{array}{rcl} g \circ f & : & A \to C \\ (g \circ f)(a) & = & g(f(a)). \end{array}$$







Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad



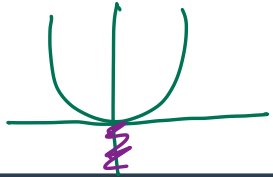
$f(x) = x$

Definición (Función Inyectiva)

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **inyectiva**, *si*

$$(\forall a, a' \in A)\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

En palabras, a elementos distintos de A, f asocia elementos distintos de B.



Definición (Función Sobreyectiva)

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **sobreyectiva**, *si*

$$(\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ f(a) = b.$$

En palabras, cada elemento de B está asociados al menos a un elemento de A.

Definición (Función Biyectiva)

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **biyectiva**, *si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.*

Definición (Función Inversa)

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Si f es biyectiva, se define la función inversa de f, denotada por f^{-1}, por:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} & : & B \to A \\ f^{-1}(b) = a & \Leftrightarrow & f(a) = b. \end{array}$$

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Considere $f : A \to B$:

x	$f(x)$
a	α
b	β
c	γ
d	δ
e	α

La función f no es inyectiva porque $f(a) = f(e)$, y no es sobreyectiva porque ϵ no es asociado a ningún elemento de A.

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Considere $g : A \to B$

x	$g(x)$
a	α
b	β
c	γ
d	δ
e	ϵ

y	$g^{-1}(y)$
α	a
β	b
γ	c
δ	d
ϵ	e

Por otro lado, la función g es biyectiva y por lo tanto podemos definir su inversa:

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Muestre que f es inyectiva, pero no es sobreyectiva.

Solución:

Suponsamos que $f(n) = f(m)$

$\Leftrightarrow 2n = 2m$

$n = m$.

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, *dada por*

$$f(z) = \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ 2|z| + 1 & z < 0. \end{cases}$$

Muestre que f *es biyectiva.*

Solución:

Sobreyectividad:

Pares: $2n = f(n)$

Impar: $2n+1 = f(-n)$

Inyectividad:

$f(z) = f(\tilde{z})$

Caso $f(z)$ par.

$2z = 2\tilde{z}$

Caso $f(z)$ impar

$2|z|+1 = 2\cdot|\tilde{z}|+1$.

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, dada por*

$$f(n, m) = n + m.$$

Muestre que f *es sobreyectiva pero no inyectiva.*

Solución:

Proposición

Sean A, B y C conjuntos y $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. Entonces:

1. *Si f y g son inyectivas, entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.*
2. *Si f y g son sobreyectivas, entonces $(g \circ f)$ es sobreyectiva.*
3. *Si f y g son biyectivas, entonces $(g \circ f)$ es biyectiva.*
4. *Si $(g \circ f)$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*
5. *Si $(g \circ f)$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.*

Demostración:

1) PDQ: $g \circ f$ es inyectiva, sabemos f y g inj.

Sup: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$

$g(f(x)) = g(f(y))$

g inj $\Rightarrow$ $f(x) = f(y)$

f inj $\Rightarrow$ $x = y$

Demostración:

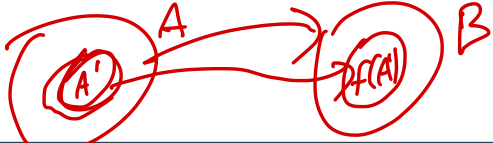
4) PDQ: f es inj. Sabemos que $g \circ f$ es inj.

Supongamos que f no es injectiva

$\exists\, x, y : x \neq y \wedge f(x) = f(y)$

$\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ ⚡ Contradicción viene de suponer f no inj.



Definición (Imagen de un conjunto)

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Si $A' \subset A$, se define la imagen de A' a través de f por

$$f(A') := \{f(a) : a \in A'\}$$

Notese que

$$b \in f(A') \Leftrightarrow (\exists a \in A')\, f(a) = b.$$

$f(x) = x^2$ $\quad f([0,1]) = [0,1)$

$f([-1,1]) = [0,1]$

Definición (Preimagen de un conjunto)

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función.Si $B' \subset B$, se define la preimagen de B' a través de f por

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\}.$$

Notese que

$$a \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(a) \in B'.$$

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Considere la función $f : A \to B$ dada por:

x	$f(x)$
a	α
b	β
c	γ
d	δ
e	α

Entonces: $f(\{a, b, c\}) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $f(\{a, e\}) = \{\alpha\}$, $f^{-1}(\{\alpha, \beta\}) = \{a, b, e\}$ y $f^{-1}(\{\delta\}) = \{d\}$.

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *dada por*

$$f(n, m) = n \cdot m.$$

Encuentre $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{10\})$, $f(\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n = m\})$.

Solución:

$f^{-1}(\{0\}) = \{(5,0), (0,0) \ldots\}$

$= \{(a,0), (0,b), a,b \in \mathbb{N}\}$

$f^{-1}(\{10\}) = \{(5,2), (10,1), (1,10), (2,5)\}$

Proposición

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. *Si A_1, A_2 son subconjuntos de A y $A_1 \subset A_2$, entonces:*

$$f(A_1) \subset f(A_2).$$

2. *Si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos de A, entonces:*

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i).$$

$$f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i).$$

Demostración:

Proposición

Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. *Si B_1, B_2 son subconjuntos de B y $B_1 \subset B_2$, entonces:*

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

2. *Si $B_1, \ldots, B_n$ son subconjuntos de B, entonces:*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i).$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i).$$

Demostración:

2) Para $n=2$: $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Sea $a \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(a) \in B_1 \cup B_2$

$\iff f(a) \in B_1 \vee f(a) \in B_2$

$\iff a \in f^{-1}(B_1) \vee a \in f^{-1}(B_2)$

$\iff a \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Cardinal de un Conjunto

Ovejas, piedras y pastores

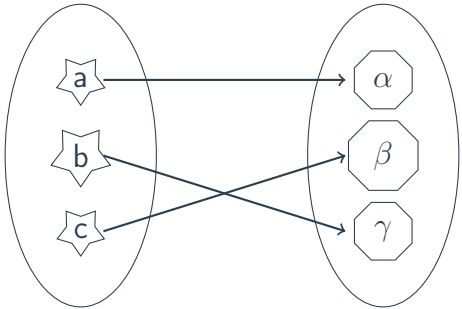
Para definir una noción de tamaño que pueda utilizarse con conjuntos infinitos, lo que haremos será definir el cardinal de un conjunto comparándolo con otro.

Definición (Cardinal de un conjunto)

Dados dos conjuntos A y B, diremos que:

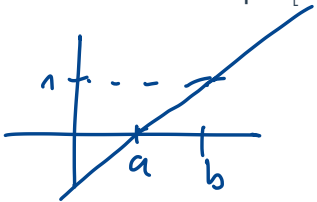
1. *El cardinal A y B son iguales, lo que denotaremos como $|A| = |B|$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$.*
2. *El cardinal de A es menor o igual que el cardinal de B, lo que denotaremos como $|A| \leq |B|$, si existe una función inyectiva $f : A \to B$.*
3. *El cardinal de A es menor estricto que el cardinal de B, lo que denotaremos como $|A| < |B|$, si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$.*

Ejemplo: Los conjuntos que aparecen a continuación tienen el mismo cardinal, pues se puede construir una biyección entre ellos:



Ejemplo: Si $a, b \in \mathbb{R}$, y $a < b$, entonces $[a, b]$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$.
En efecto, sea la función $f : [a, b] \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$



Veamos que f es biyectiva.

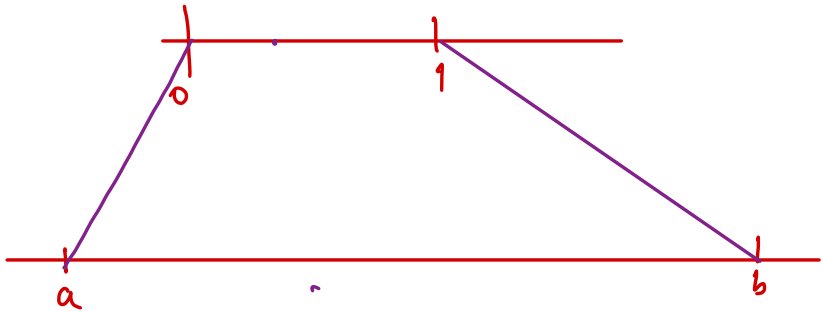
Inyectividad: Si $f(x) = f(y)$, entonces $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a}{b-a}$, de donde se puede despejar $x = y$, que es lo que se quería probar.

Sobreyectividad: Sea $y \in [0, 1]$, entonces $a + (b - a)y \in [a, b]$ y además $f(a + (b - a)y) = y$, por lo tanto f es sobreyectiva.

En conclusión, existe una biyección entre $[a, b]$ y $[0, 1]$, y por lo tanto ambos conjuntos tienen el mismo cardinal.

$$\frac{x-a}{b-a} = y \iff x = a + y(b-a)$$

Demostración:



Definición (Conjunto Finito)

Diremos que un conjunto A es finito si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\{1, 2, \ldots, n\}|$.

Proposición (Propiedades del Cardinal de un Conjunto)

Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $|A| \leq |A|$.
2. *Si* $|A| \leq |B|$ *y* $|B| \leq |C|$, *entonces* $|A| \leq |C|$.
3. *Si* $|A| \leq |B|$ *y* $|B| \leq |A|$, *entonces* $|A| = |B|$. *(Teorema de Bernstein - Cantor - Schröeder)*
4. *Si* $A \subset B$, *entonces* $|A| \leq |B|$.
5. $|A| < |2^A|$ *(Teorema de Cantor).*

Demostración:

1) Queremos probar que $\exists\, f: A \to A$ tal que f inyectiva: Muy fácil:

$$f(a) = a$$

En efecto: $f(a) = f(b) \iff a = b$

($f(a)$ es a, $f(b)$ es b)

$$\Rightarrow |A| \leq |A|$$

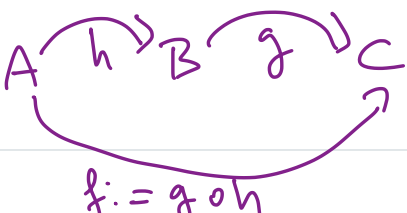
Demostración:

2) $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C|$ pdq: $|A| \leq |C|$

¿Cómo encuentro una fun. inj. de A a C?

Como $|A| \leq |B| \Rightarrow \exists\, h : A \to B$ inyectiva

$|B| \leq |C| \Rightarrow \exists\, g : B \to C$ inyectiva.



Demostración:

5) $|A| < |2^A|$

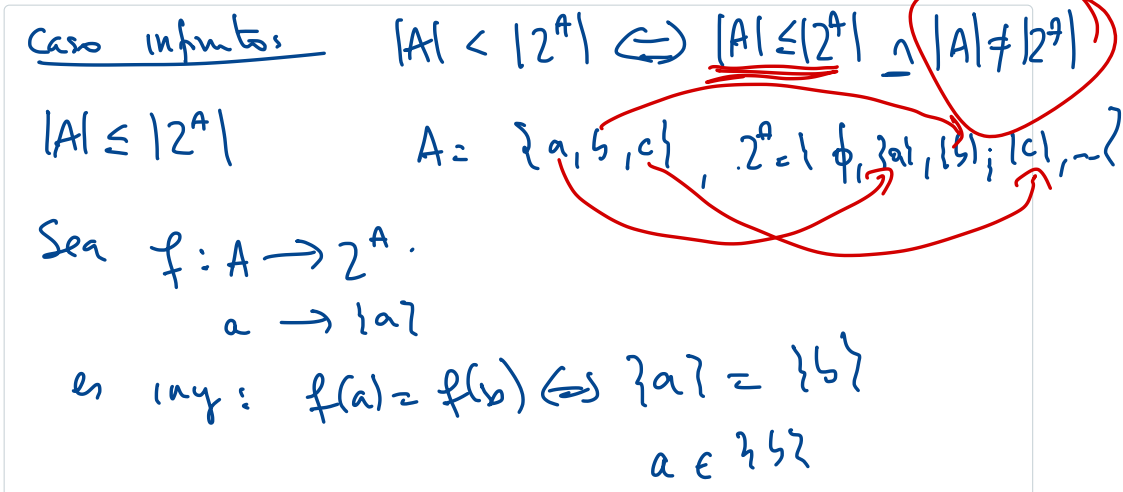
n finito:

$n < 2^n$

0/1	0/1	0/1	...	0/1
1	2	3	...	n
2	2	2	...	2

2^n subconjuntos.

Demostración:



Demostración:

Probaremos que NO existe ninguna biyección de A en 2^A.

Por contradicción: Supongamos que $\exists\ f: A \to 2^A$ sobreyectiva.

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

Supongamos que $\exists\ \bar{a} \in A : f(\bar{a}) = B$

Caso 1: $\bar{a} \in B \Rightarrow \bar{a} \notin f(\bar{a}) = B$

Caso 2: $\bar{a} \notin B \Leftrightarrow \bar{a} \notin f(\bar{a}) \Rightarrow \bar{a} \in B$

Conjuntos numerables

Definición (Conjunto Numerable)

Diremos que un conjunto es numerable si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.

Proposición

$\mathbb{Z}$ *es numerable.*

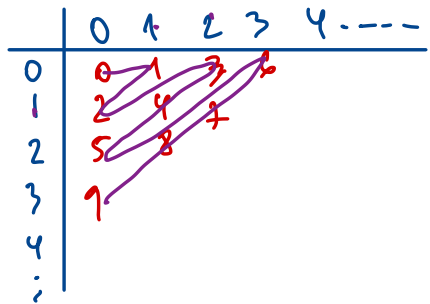
Demostración:

Ver función clase del Martes

Proposición

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración:



$$f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0,1) = \frac{(0+1)(0+1+1)}{2} + 0$$

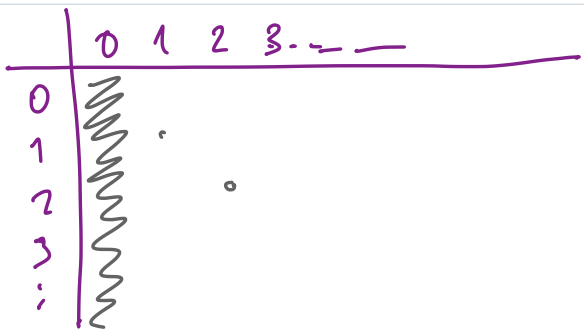
$$= 1$$

Corolario

$\mathbb{Q}$ *es numerable.*

$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Demostración:



Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos numerables, entonces $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es numerable.

Demostración:

$A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$

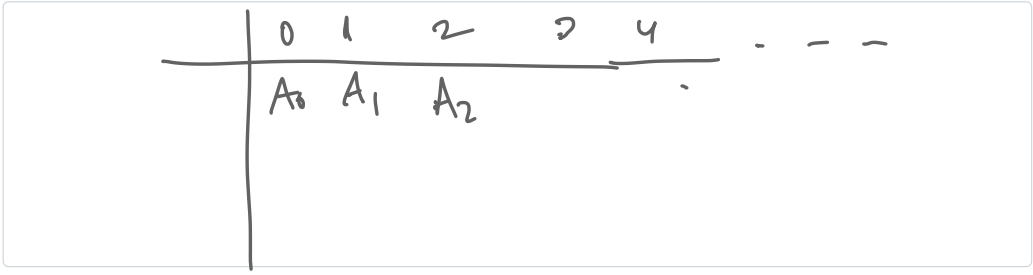
Proposición

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un conjunto numerable, entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

es numerable.

Demostración:



Conjuntos no numerables

Proposición

$2^{\mathbb{N}}$ *es no numerable.*

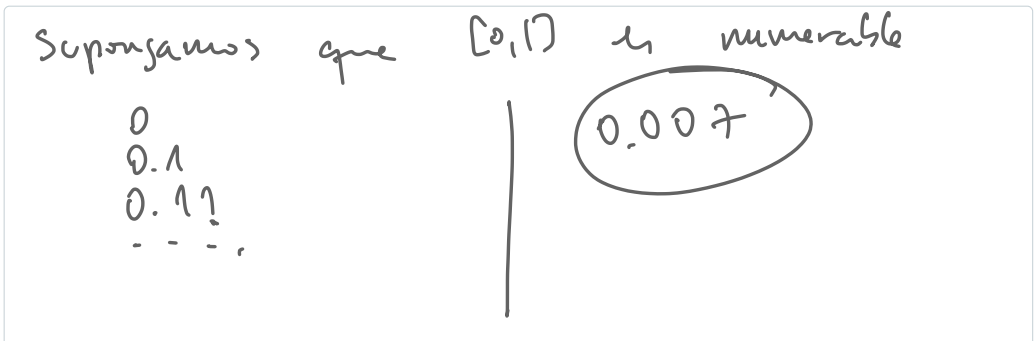
Demostración:

Consecuencia de T. de Cantor

Proposición

$[0, 1]$ *es no numerable.*

Demostración:



Corolario

$\mathbb{R}$ *es no numerable.*

Demostración:

pues $|[0,1]| \leq |\mathbb{R}|$

La Hipótesis del Continuo

Sabemos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Pregunta (Hilbert, 1900)

¿Existe un conjunto cuyo cardinal sea estrictamente mayor que $|\mathbb{N}|$ y estrictamente menor que $|\mathbb{R}|$?

La respuesta llegó en dos etapas: Gödel (1940) y Cohen (1963) mostraron que esta hipótesis es *independiente* de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos. No puede ni probarse ni refutarse.

"No es ninguna molestia explicarle qué pienso del infinito . . .
en el fondo no creo que exista el infinito."

Mario Benedetti